Απειροστικός Λογισμός ΙΙ Μάθημα 8 17/03/16

Ασκήσεις Φυλλαδίου 01)

Άσκηση (7): $f,g: A\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Ν.δ.ο. $f+g$ ομοιόμορφα συνεχής.

α) με ε-δ ορισμό:

Έστω $\varepsilon>0$.

Πρέπει ν.δ.ο. $\exists \delta_1>0\ \forall x,y\in A\ |x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

$\exists \delta_2>0\ \forall x,y\in A\ |x-y|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

Θεωρούμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

$\forall x,y\in A\ |x-y|<\delta \Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |[f(x)-f(y)]+[g(x)-g(y)]| \le$

$\le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

β) με χαρακτηρισμό ομοιόμορφης συνέχειας:

Θεωρούμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $\lim(x_n-y_n)=0$

f ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow \lim(f(x_n)-f(y_n))=0$

g ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow \lim(g(x_n)-g(y_n))=0$

$\lim[(f+g)(x_n)-(f+g)(y_n)] = \lim(f(x_n)-f(y_n)+g(x_n)-g(y_n))=0$.

Άσκηση (8): α) $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon>0$.

Πρέπει ν.δ.ο. $\exists\delta>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$|f(x)-f(y)|=|x-y|<\delta$

Αν θεωρήσουμε $\delta=\varepsilon$ έχουμε το ζητούμενο.

Άλλος τρόπος: $f'(x)=1$ η f πληροί συνθήκη Lipschitz $\Rightarrow$

$|f'(x)|\le 1$ $\Rightarrow$ η f ομοιόμορφα συνεχής.

• $g(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon>0$.

Πρέπει ν.δ.ο. $\exists\delta>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$

$|g(x)-g(y)| = |\sin x-\sin y| = |2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}| =$

$= 2\left|\frac{x-y}{2}\right|\cdot 1 = |x-y|<\delta$

Αν θεωρήσουμε $\delta = \varepsilon$ έχουμε το ζητούμενο. (2)

<u>Άλλος τρόπος:</u> $g'(x) = \cos x$ Άρα, η g πληροί συνθήκη Lipschitz $\Rightarrow$
$|g'(x)| \leq 1$ $\Rightarrow$ η g ομοιόμορφα συνεχής.

• $h(x) = (f \cdot g)(x) = x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$x_n = 2n\pi$
$y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$

$\lim(x_n - y_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$

$\lim(h(x_n) - h(y_n)) = \lim\left[-(2n\pi + \frac{1}{n})\sin(2n\pi + \frac{1}{n})\right] =$

$= -\lim \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}(2\pi + \frac{1}{n^2}) = -2\pi \neq 0$

Άρα, η h δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) f φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M_1 > 0 \ \forall x \in A \ |f(x)| \leq M_1$
g φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M_2 > 0 \ \forall x \in A \ |g(x)| \leq M_2$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Πρέπει ν.δ.ο. $\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta \Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < \varepsilon$

γνωρίζουμε ότι $\exists \delta_1 > 0 \ \forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2}$

γνωρίζουμε ότι $\exists \delta_2 > 0 \ \forall x, y \in A$ με $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2}$

Θεωρούμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Τότε: $|f(x)[g(x) - g(y)] + g(y)[f(x) - f(y)]| < M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2} + M_2 \frac{\varepsilon}{M_1 + M_2} = \varepsilon$.

<u>Άσκηση 9</u>: Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις.

$f: [a, b] \to [\gamma, \delta]$ Ν.δ.ο. $g \circ f$ ομοιόμορφα συνεχής.

$g: [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$

$f([a, b]) \subseteq [\gamma, \delta]$ Άρα, η $g \circ f$ ορίζεται

$f([a, b]) \cap D_g \neq \emptyset$ με $g \circ f: [a, b] \to \mathbb{R}$.

Άρα, η $g \circ f$ συνεχής συνάρτηση ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Η $g \circ f$ είναι φραγμένη σε κλειστό διάστημα $\Rightarrow$ η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

<u>Άσκηση 10</u>: $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\lim_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Ν.δ.ο. η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ και έστω $\varepsilon > 0$.

Εξ' ορισμού $\exists r > 0 \ \forall x \in [a, +\infty)$

$x > r \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon/2$ (*)

Η f συνεχής στο $[a, r+1] \Rightarrow f|_{[a,r+1]}$ ομοιόμορφα συνεχής.

Άρα, $\exists \delta_1 > 0 \ \forall x,y \in [a, r+1] : |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$

Έστω $x,y \in [a,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

① $x \leq r+1$, $y \leq r+1$ τότε το δείξαμε προηγουμένως.

② Έστω $x > r+1 > r$ τότε $y - x \leq |y-x| \Rightarrow y \leq |x-y| + x$

$x - y \leq |y-x| \Rightarrow y \geq -|x-y| + x > -1 + r + 1 = r$

$|x-y| < \delta \leq 1$
$-|x-y| > -1$

Άρα, $x > r$ και $y > r$.

$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-\ell| + |f(y)-\ell| \overset{(*)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Άσκηση (11): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο. η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεωρούμε $f_1, f_2 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_1(x) = f(x)$ και $f_2(x) = f(-x)$.

$f_1(0) = f(0) = f_2(0)$ και f_1, f_2 συνεχείς.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \\ &\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[(10)]{\text{Άσκηση}} f_1, f_2 \text{ ομοιόμορφα συνεχείς.}$$

Έστω $\varepsilon > 0$.

$\exists \delta_1 > 0 \ \forall x,y \in [0,+\infty)$ με $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon/2$ (I)

$\exists \delta_2 > 0 \ \forall x,y \in [0,+\infty)$ με $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - f_2(y)| < \varepsilon/2$ (II)

Παρατηρούμε ότι $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq 0 \\ f_2(-x), & x \leq 0. \end{cases}$

Θεωρούμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Έστω $x,y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

① $x \geq 0$ και $y \geq 0$ τότε $|f(x)-f(y)| = |f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$.

② $x \leq 0$ και $y \leq 0$ τότε $|f(x)-f(y)| = |f_2(-x) - f_2(-y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$.

③ Έστω $x < 0 < y$ τότε $|f(x) - f(y)| =$

$= |f_2(-x) - f_1(y)| = |f_2(-x) - f_2(0)| +$

$+ |f_1(0) - f_1(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

<u>Άσκηση 12</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική. Ν.δ.ο. η f ομοιόμορφα συνεχής.

f περιοδική $\Leftrightarrow \exists T>0 \ \forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,2T] \Rightarrow f|_{[0,2T]}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω $\varepsilon>0$.

$(\exists \delta>0$ με $\delta<T)(\forall x,y \in [0,2T]) : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Έστω $x,y \in \mathbb{R}$, $x<y$ με $|x-y|<\delta$ $\exists z \in \mathbb{Z}$ $zT \leq x \leq z(T+1)$

$\Rightarrow x - zT \in [0,T] \subseteq [0,2T]$.

$x<y \Rightarrow x-zT < y-zT \in [0,T]$

$y - x \leq |x-y| < \delta < T \Rightarrow y < zT+2T$

$y - zT \in [0,2T] \Rightarrow y - zT < 2T$

Άρα, $\exists \delta>0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \overset{\text{επειδή η } f \text{ περιοδική}}{=} |f(x-zT)-f(y-zT)| < \varepsilon$.

<u>Άσκηση 13</u>: α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 18x+35$.

Έστω $\varepsilon>0$.

Πρέπει ν.δ.ο. $\exists \delta>0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Έχουμε $|f(x)-f(y)| = 18|x-y| < 18\delta$

Αν θεωρήσουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{18}$ έχουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

<u>Άλλος τρόπος</u>: $f'(x) = 18 \Rightarrow |f'(x)| \leq 18$

Η f έχει φραγμένη παράγωγο $\Rightarrow$ η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής

β) $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

<u>1ος τρόπος</u>: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2}$

$x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$

<u>2ος τρόπος</u>: $(\varepsilon-\delta)$ ορισμός.

<u>3ος τρόπος</u>: f συνεχής, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Άρα, από άσκηση 10, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

γ) $f: [0, \frac{\pi}{3})$ με $f(x) = tgx$. Η f συνεχής

$\lim_{x \to \pi/3} tgx = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$. Από Θεώρημα 446 Ντούγιας, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

δ) $f: [0, \frac{\pi}{2})$ με $f(x) = tgx$. Η f συνεχής.

$\lim_{x \to \pi/2} tgx = +\infty$. Άρα, η f όχι ομοιόμορφα συνεχής.

ε) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x\cos x$.

Θεωρούμε $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$

$\lim(x_n - y_n) = \lim(-\frac{1}{n}) = 0$

$\lim(f(x_n) - f(y_n)) = \lim(-(2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}))\sin\frac{1}{n} =$

$= \lim \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot (2\pi + \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}) = 1 \cdot 2\pi \neq 0$

Άρα, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ς) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, $a > 0$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow |f'(x)| = \frac{|x|}{|\sqrt{x^2 + a^2}|}$. Όμως, $|x| \leq |\sqrt{x^2 + a^2}|$

$x^2 \leq x^2 + a^2$

$a^2 \geq 0$ ισχύει.

Άρα, $|f'(x)| \leq 1$.

η) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos x^2}{x+1}$

Από άσκηση 10, επειδή η f συνεχής και $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x^2}{x+1} = 0$.

$\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0\right]$ $\Rightarrow$ Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.